

# En dygtig elev er ...

## Sheffield (1999)

- Opmærksom og nysgerrig
- God til at opfatte, og generalisere.
- Kan ræsonnere analytisk, deduktivt og induktivt.
- Evne til let, fleksibelt og kreativt at arbejde med matematiske begreber.
- Energi og udholdenhed i problemløsning.
- Tendens til at formulere matematiske problemer – og ikke kun løse dem.

## Krutetskii (1976)

- Hurtig til at ræsonnere.
- God til at generalisere.
- God til at håndtere abstrakte begreber.
- Genkender og kan bruge en matematisk struktur, de har set før.
- God til at huske regler og løsninger fra tidligere.
- God til at finde genveje, dvs. tænke økonomisk.

**„HIGH IQ AND HIGH MATHEMATICAL TALENT!“  
RESULTS FROM NINE YEARS TALENT SEARCH  
IN THE PRIMA-PROJECT HAMBURG**

Marianne Nolte , University of Hamburg

- Components tested via intelligence tests are essential for mathematical thinking.
- Within the idea of a general factor underlying intelligent behavior an intelligence test should be a good predictor for mathematical giftedness.
- We collected data from a talent search process, conducted to identify children with high mathematical abilities.
- **The results confirmed our impression that mathematical giftedness not necessarily goes along with high results in intelligence tests.**

## Käpnick (1998) posed several gifted children the task to continue the sequence 2, 4, 6, 8

*“Many children developed creative continuations:*

*Child 1:           2, 4, 6, 8,           1, 3, 7, 9*



*Child 2:           2, 4, 6, 8,           10, 11, 13, 15*

*Child 3:           2, 4, 6, 8,           10, 8, 6, 4, 2*

- *The first child explained that **two numbers produce 10.***
- *The second took **even numbers until 10 and then the odd numbers.***
- *The third child took **10 as a mirror.***

*From a mathematical point of view, there are often several possibilities to continue a starting part of a sequence, but intelligence tests accept only one.”*

# Hvad siger de selv?

1	Er du god til matematik? Hvorfra ved du, at du er god til matematik?
2	Hvornår synes du selv, du lærer mest i matematiktimerne?
3	Kan du give eksempel på en opgave, du lærte meget af? Hvorfor synes du, den opgave var særligt god?
4	Arbejder du selv godt sammen med andre i klassen? Hvem er det især?
5	Hvor tit taler du med din matematiklærer om svære opgaver?
6	Synes du, din matematiklærer forlanger nok af dig?
7	Eller for meget?
8	Har du nogle gode råd til lærere, der har dygtige elever i deres klasse?
Anne Sofie 3.b	
Nikolaj 8.a	

# PCK

## Pedagogical Content Knowledge (Shulman)

PCK er de mest almindelige emner, de mest anvendelige repræsentationsformer, de stærkeste analogier, illustrationer, eksempler og forklaringer og demonstrationer, altså de måder, man kan repræsentere og beskrive et fag, så det bliver forståeligt for andre.

Lærere må have adgang til en veritabel værktøjskasse med mange forskellige repræsentationsformer, hvor nogle stammer fra forskning, mens andre fra afprøvning i praksis.



## Three ways to think about addition

- Mary has 3 apples. Ron has 2 apples. How many apples do they have in all?

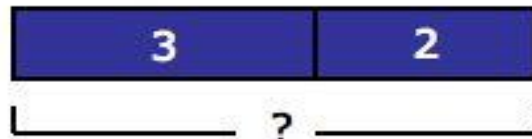
**Combining**



$$3 + 2 = 5$$

- Mary had 3 apples. Then she got 2 more. How many apples does she have now?

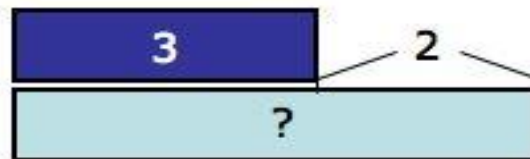
**Increasing**



$$3 + 2 = 5$$

- Mary has 3 apples. Ron has 2 more than Mary. How many apples does Ron have?

**Adding on the difference**



$$3 + 2 = 5$$

# Gør også forskel på ... (= uv. diff.)

- **Krav** til kvalitet eller kvantitet i de enkelte elevers arbejde
- **Arbejdstid** (til arbejdet, lektier ...)
- **Hjælp** og støtte (prioritér lærertid forskelligt til forskellige elever, lad elever hjælpe hinanden eller spørge forældre)
- **Emnevalg!**
- **IT**, supplerende materialer (også bøger), ...
- **Evalueringsformer**
- **Elevers egne mål**

# Nogle rutiner er gode (nok)

*Oversigt på tavlen over dagens/timens arbejde*  
*Materialer fast i klassen (plastede 100-tavler, centicubes, computer..)*  
*Hovedregning*  
*Inddrage andre fag (idræt, natur/teknik, ..)*  
*Forklaring for blot en del af klassen*  
*Klasse-debat med elev-begrundelser*  
*"Jeg forventer ikke, alle når alt"*  
*Svære ekstra-ark til nogle*  
*Makkerarbejde med lærersamtaler*  
*Regne-historier, fokus på mundtlighed*  
*Styret undersøgelse med konkrete materialer*  
*Tillid til, at elever selv organiserer undersøgelse*



# Faglige pointer skal vel styre?



En faglig *pointe* er et matematisk sagsforhold (resultat, udsagn, metode, ..), som læreren har bedømt særlig vigtigt for eleverne (s indsigt, forståelse, anvendelse, ..)



# Hvornår kan **læreren** formulere (undervisningens) *pointer*?

## Ved lektionens start

- Hvordan indledes/programsættes lektionen?
- Siges eller skrives noget på tavlen, som er andet og mere en aktivitetsoversigt.?
- Er der referencer til forudgående lektion(er)?

## Undervejs i lektionen

- Hvornår slås der noget fast som vigtigt? Og af hvem?
- Er det i klassesamtale, af/for grupper eller af/for enkeltelever?
- Er det forudset/planlagt?

## Ved lektionens slutning

- Hvad sker der i den afsluttende opsummering – hvis den forekommer?
- Er det fx blot en fremadrettet aktivitetsoversigt (som lektier)?

# Fem faser

Tid	Ankomst	Opsummering	Tid	Lektier	Tid	Nyt stof	Opgave-regning
0	6	27	0	17	0	11	5
]0; 1]	9	9	]0; 5]	10	]0; 5]	9	1
]1; 2]	8	5	]5; 10]	7	]5; 10]	13	3
]2; 3]	10	3	]10; 15]	3	]10; 15]	2	5
]3; 4]	9	0	]15; 20]	6	]15; 20]	6	6
]4; 5]	4	1	]20; 25]	1	]20; 30]	6	14
5+	4	5	25+	6	30+	3	16
I alt	50	50	I alt	50	I alt	50	50

# Hvornår kan eleverne formulere (læringens) *pointer*?

To slags mundtlig rapportering kan repræsentere kognitive processer i læring (Ericsson & Simon, 1993):

1. Den løbende verbale rapport eller "think aloud" rapporten.
2. Den retrospektive rapport, der umiddelbart efter en opgaveløsning kan findes i STM, i det mindste delvist – men ellers findes fra LTM (= Long Term Memory).

De antyder også forskellige niveauer:

- Direkte vokalisering af indre tale (covert articulatory) eller mundtlig kodning. Fx som Krutetskii: **Tænk højt, men du løser opgaven.**
- Beskrivelse eller rettere forklaring af tankers indhold.  
Fx til en elev, der er gået i stå: **Hvad tænker du på?**
- Når en elev skal forklare sine tankeprocesser eller idéer.  
Fx: **Hvordan tænkte du, da du regnede 23 x 12?**

# Japanske momenter

- *Neriage* kaldes på japansk den proces, hvor elevernes læringsmetoder vendes og drejes i en klasse-diskussion m.h.p. at præsentere en sammenhængende matematisk idé eller resultat, en pointe. Det er for japanske lærere et helt afgørende kriterium for, om lektionen er lykkedes.
- *Matome* kaldes på japansk en opsummering til sidst. Her afrunder læreren med en omhyggelig opsummering af elevernes arbejde. Og i en fælles diskussion om det, de har lært, formuleres pointen.

# Krutetskiis screening



1. 25 rør med længder på 5 m og 8 m blev lagt over en strækning på 155 m.

(Hvor mange rør blev lagt af hver slags?)

2. En dreng har lige så mange søstre som brødre, og hans søster har halvt så mange søstre som brødre.

(Hvor mange brødre og søstre er der?)

3. En cyklist kørte 20 km i timen fra A til B, men kun 10 km i timen fra B til A.

(Cyklistens gennemsnitsfart fra A til B?)

# Når vi nu (alligevel) stiller opgaver?

- Det skal være muligt at brillere!
- Åbenhed er godt, fordi der så lægges op til, at eleven selv vælger strategi, og elevens begrundelse og refleksion kan være del af besvarelsen:

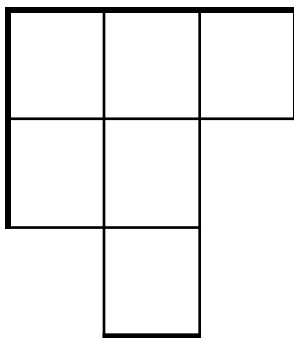
## ***Inquiry Based Mathematical Education***

- Opgaver skal give mulighed for at konkludere, dvs. tillade eleven at tage matematiske beslutninger.

# Seks lærerstrategier (Fielker)

## 1. Gør undersøgelsen færdig

- Fx: Denne form har omkredsen 12.
- Lav 3 andre former med omkredsen 12



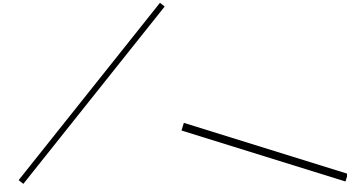


## 2. Udvid en kontekst

- Antal diagonaler i rektangler, 4-kanter, 5-kanter, en terning?

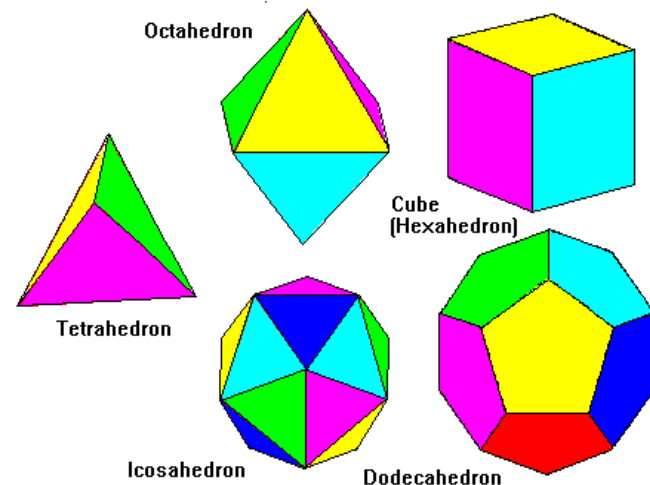
## 3. Udnyt "gamle" opgaver

- Hvor mange former på sømbræt med arealet 4?
- Svaret er 10, hvad er spørgsmålet?
- Her er to diagonaler. Hvor er siderne?



## 4. Mønstre og systemer

- Byg de 5 figurer og tæl antal kanter, flader og hjørner.
- Find selv på flere (fx med polydron-brikker).  
Er der et system?



## 5. Vær upræcis: efterlad plads til "forhandling"

- Byg 5-huse af kvadratiske værelser. Er der mange?

## 6. Lav om på noget

- Fx hvis man adderer et 2-cifret tal med dets "bagvendte" får man tal fra 11-tabellen. Hvorfor?
- Hvad sker der med 3-cifrede tal? 4-cifrede? 1-cifrede?
- Kari og Tonje kappløper. Kari er raskest. Derfor får Tonje 100 meters forsprang. Kari har løpt 12 meter når Tonje har løpt 9 meter. Hvor langt har de løpt når Kari tar igjen Tonje?



# Nye muligheder for "selvstyring"

- Lad elever arrangere WOOP eller QR løb
- Forklaringer med fx skærmoptagelse og i Google Docs
- "Klubber" og "nørd-hold"
- Nordisk Matematikkonkurrence <http://dkmat.dk/aktiviteter/nordisk-matematikkonkurrence/>

Flere referencer:

- International Group for Mathematical Creativity and Giftedness <http://igmcg.org/>
- TSG6 at **ICME-11**, i Monterrey, Mexico <http://tsg.icme11.org/tsg/show/7>
- TSG 3 at **ICME-12**, i Seoul, Korea [www.icme12.org/sub/tsg/tsgload.asp?tsgNo=03](http://www.icme12.org/sub/tsg/tsgload.asp?tsgNo=03)
- ICMI Study 16, Challenging Mathematics in and beyond the Classroom [www.amt.edu.au/icmis16dd.html](http://www.amt.edu.au/icmis16dd.html)

# En god strategi med kolleger

Lesson-study er professionel udvikling, hvor lærere systematisk undersøger egen praksis for at gøre deres undervisning endnu mere effektiv. Det er samarbejde om nogle få studie-lektioner.

Arbejdet med hver studie-lektion sker i faser:

- 1.Undersøgelse og forberedelse, hvor en gruppe lærere sammen udarbejder en detaljeret plan for studie-lektionen.
- 2.Implementering, hvor én lærer underviser en klasse i lektionen, mens andre observerer.
- 3.Refleksion og forbedring, hvor gruppen mødes for at diskutere deres observationer fra lektionen.
- 4.Gentagen implementering og refleksion, hvor en anden lærer underviser en anden klasse i lektionen, mens gruppens medlemmer igen observerer.

# Lektion i matematik blev forbedret og brugt igen



To lærere og tre lærerstuderende samarbejdede om en lektion om lignedannede, retvinklede trekanter i 6. klasse på Holme Skole.

De observerede hinanden, evaluerede lektionen, ændrede på den og afprøvede den igen i en 7. klasse.

**Lesson Study** er efteruddannelse inspireret fra Japan.